Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Kombinatorikai játékok vizsgálata a Kalmár–Steinhaus-függvény segítségével

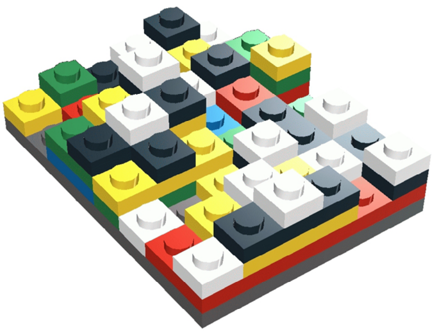
Investigation of combinatorial games with the help of the Kalmár–Steinhaus function

Szakdolgozat

Hégely Éva
Matematika BSc

Témavezető:

Dr. Waldhauser Tamás
egyetemi adjunktus
Algebra és Számelmélet Tanszék



Szeged
2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Waldhauser Tamásnak, aki tanácsaival és útmutatásaival hatalmas segítséget nyújtott szakdolgozatom elkészüléséhez.

Továbbá köszönöm Dr. Karsai Jánosnak, hogy segített a dolgozat megformázásában és elkészítette a *Mathematica* Stylesheetet, amiben dolgozatomat írtam.

Tartalom

1. Bevezetés

A dolgozat célja egy kombinatorikai játék több változatára nyerő stratégia ismertetése. A stratégiák alapjául szolgáló elméletet Kalmár László és Hugo Steinhaus egymástól függetlenül publikálták az 1920-as években [4,6]. Az általunk vizsgált játékot LEGO építőkockákkal lehet játszani, ezért LEGO játéknak fogjuk nevezni [8]. Az elnevezést az is motiválja, hogy a Kalmár–Steinhaus-függvény definíciójában szereplő műveletet az angol „least even, greatest odd" kifejezés rövidítéseként lego-val jelöltük.

A következőkben röviden összefoglaljuk a dolgozat fejezeteinek tartalmát. A második fejezetben megadjuk a téma alapvető definícióit, illetve tételeit. Két fontos függvényről (Sprague–Grundy- és Kalmár–Steinhaus-függvény) teszünk említést, amelyek leírják a játékok nyerő stratégiáit. Majd ismertetjük játékok különböző kompozícióit és ezen játékok Sprague–Grundy- és Kalmár–Steinhaus-függvényét. A harmadik fejezetben megadjuk a LEGO játék különböző változatainak játékszabályát. A negyedik fejezetben nyerő stratégiákat adunk a LEGO játék azon változataira, ahol nincs korlátozva az építmény magassága, az utolsó fejezetben pedig a korlátozott magasságú változatokkal foglalkozunk. A Függelékben megadjuk azokat a *Mathematica* programokat, amelyekkel a játékokat vizsgáltuk; ezek segítségével sejtettük meg a nyerő stratégiákat. Ezek a programok megtalálhatók a CD mellékleten is, és futtathatók a *Mathematica* programmal éppúgy, mint az ingyenesen letölthető CDF Player segítségével [9].

2. Elméleti összefoglaló

2.1. Egyszerű játék, Sprague–Grundy- és Kalmár–Steinhaus-függvény

A továbbiakban röviden összefoglaljuk azokat a fogalmakat és összefüggéseket, amelyekre szükségünk lesz a LEGO játékok elemzésénél. A kombinatorikai játékok elméletéről bővebb leírást Csákány Béla *Diszkrét matematikai játékok* című könyvében [3] találhatunk.

Egyszerű játéknak nevezzük a normál, végesfokú, szimmetrikus, kétszemélyes kombinatorikai játékokat. Az egyszerű játékokat matematikai struktúraként egy $\mathcal{J} = (P, L, N)$ hármas ír le, ahol

– P az állások (pozíciók) halmaza;
– $L \subseteq P \times P$ a lépések halmaza: akkor és csak akkor szabad a p állásból a q állásba lépni, ha $(p, q) \in L$;
– N a végállások halmaza: $N = \{p \in P \mid \nexists\, q \in P : (p, q) \in L\}$.

Normál játékokat vizsgálunk, ami azt jelenti, hogy a végállásba lépő játékos nyer. Minden játéknak létezik betli változata is, ahol az veszít, aki az utolsó lépést teszi.

1. DEFINÍCIÓ

Az $M \subseteq P$ halmazt a $\mathcal{J}$ játék magjának nevezzük, ha

– a végállások M-ben vannak,
– minden M-beli állásból csak M^C-beli állásba lehet lépni,
– minden M^C-beli állásból lehet M-beli állásba lépni.

2. TÉTEL

Minden egyszerű játéknak létezik magja, és az egyértelműen meghatározott.

A későbbiekben a magbeli állásokat jó állásoknak, a magon kívüli állásokat rossz állásoknak nevezzük. A mag ismeretében megadható a nyerő stratégia: „Lépj mindig jó állásba!”. Ha a kezdőállás rossz, akkor a kezdő játékosnak, ha a kezdőállás jó, akkor a második játékosnak garantálja a nyerést ez a stratégia.

3. DEFINÍCIÓ

A $H \subset \mathbb{N}_0$ halmazból kimaradó legkisebb nemnegatív egész számot $\operatorname{mex} H = \min(\mathbb{N}_0 \setminus H)$ jelöli (az angol „minimal excludant” kifejezés rövidítése).

4. DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{J} = (P, L, N)$ játék Sprague–Grundy-függvénye az a $\gamma : P \to \mathbb{N}_0$ leképezés, amelyre minden $p \in P$ esetén

$$\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q) \mid q \in P,\ (p, q) \in L\}.$$

5. TÉTEL

Minden egyszerű játéknak létezik Sprague–Grundy-függvénye, és az egyértelműen meghatározott. A Sprague–Grundy-függvény zérushelyeinek halmaza éppen a játék magja: $M = \{p \in P : \gamma(p) = 0\}$.

6. DEFINÍCIÓ

Tetszőleges véges $H \subset \mathbb{N}_0$ halmaz esetén jelölje $\mathrm{lego}H$ a H halmaz legkisebb páros elemét, amennyiben van páros eleme H-nak. Ha H minden eleme páratlan, akkor legyen $\mathrm{lego}H$ a H halmaz legnagyobb (páratlan) eleme (a „least even greatest odd” angol kifejezés rövidítése).

7. DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{J} = (P, L, N)$ játék Kalmár-Steinhaus-függvénye az a $\kappa : P \to \mathbb{N}_0$ leképezés, amelyre minden $p \in P$ esetén

$$\kappa(p) = 1 + \mathrm{lego}\,\{\kappa(q) \mid q \in P,\ (p, q) \in L\}.$$

8. MEGJEGYZÉS

Tegyük fel, hogy mindkét játékos ismeri a játék magját, azaz a nyerő stratégiát. Természetes feltevés, hogy az a játékos, akinek nyerő stratégiája van, olyan stratégiát választ, amely a lehető leggyorsabb nyerést biztosítja számára, a másik játékos pedig igyekszik késleltetni a vereségét. A $\kappa(p)$ érték megadja, hogy ezen feltevés mellett, a p állásból indulva, hány lépésig tart a játszma.

9. TÉTEL

Minden egyszerű játéknak létezik Kalmár–Steinhaus-függvénye, és az egyértelműen meghatározott. A Kalmár–Steinhaus-függvény páros értékei adják meg a játék magját: $M = \{p \in P : \kappa(p) \text{ páros}\}$.

2.2. Kompozíciók

A következőkben háromféle lehetséges játékszabályt adunk meg arra, hogy hogyan játsszunk több játékot egyszerre, és leírjuk ezen játékkompozíciók magját.

10. DEFINÍCIÓ

Legyenek $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$ és $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$ egyszerű játékok. Definiáljuk a $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_1 \wedge \mathcal{J}_2$ és $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$ normál játékokat a következőképpen. Az állások halmaza mindhárom esetben $P_1 \times P_2$, a lépéseket pedig az alábbi szabályok adják meg.

– A $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ játék esetén egy lépés során a két játék közül csak az egyikben léphetünk; a játék akkor ér véget, ha mindkét komponens végállásba jut. Ezt a játékot $\mathcal{J}_1$ és $\mathcal{J}_2$ összegének, vagy diszjunktív kompozíciójának nevezzük.

- A $\mathcal{J}_1 \bigwedge \mathcal{J}_2$ játék esetén egy lépés során mindkét játékban lépnünk kell; a játék akkor ér véget, ha valamelyik komponens végállásba jut. Ezt a játékot $\mathcal{J}_1$ és $\mathcal{J}_2$ szorzatának, vagy konjunktív kompozíciójának nevezzük.
- A $\mathcal{J}_1 \bigvee \mathcal{J}_2$ játék esetén egy lépés során tetszés szerint léphetünk az egyik, a másik, vagy mindkét játékban; a játék akkor ér véget, ha mindkét komponens végállásba jut. Ezt a játékot $\mathcal{J}_1$ és $\mathcal{J}_2$ szelektív kompozíciójának nevezzük.

11. MEGJEGYZÉS

A fenti kompozíciók kettőnél több komponensre is definiálhatók. Módosíthatjuk is a játékszabályokat úgy, hogy a diszjunktív, illetve a szelektív kompozíció érjen véget, mihelyt valamelyik komponens véget ért, a konjunktív kompozíciót pedig folytathatjuk, amíg minden komponense véget nem ér. Minden esetben játszhatunk betli játékot is, így tehát tucatnyi módja van annak, hogy több játékot egyszerre játsszunk. Ezek elemzése megtalálható Conway *On Numbers and Games* című művében [2].

12. TÉTEL

Egyszerű játékok összege, szorzata és szelektív kompozíciója is egyszerű.

13. DEFINÍCIÓ

Az a és b nemnegatív egész számok nim-összegén azt az $a \oplus b$ nemnegatív egész számot értjük, amelyet akkor kapunk, ha a-t és b-t kettes számrendszerben úgy adjuk össze, hogy az átvitelről „elfelejtkezünk” (azaz bitenkénti kizáró vagy műveletet végzünk).

14. TÉTEL

Az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ játékok összegének Sprague–Grundy-függvénye megkaphapható $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ Sprague–Grundy-függvényéből a nim-összeadás segítségével:

$$\gamma_{\mathcal{U}+\mathcal{V}}(p, q) = \gamma_{\mathcal{U}}(p) \oplus \gamma_{\mathcal{V}}(q).$$

15. DEFINÍCIÓ

Jelölje $a \wedge b$ az a és b nemnegatív egész számok közül a kisebbiket:

$$a \wedge b = \min(a, b).$$

16. TÉTEL

Az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ játékok szorzatának Kalmár–Steinhaus-függvénye megkaphapható $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ Kalmár–Steinhaus-függvényéből a minimumképzés segítségével:

$$\kappa_{\mathcal{U}\bigwedge\mathcal{V}}(p, q) = \kappa_{\mathcal{U}}(p) \wedge \kappa_{\mathcal{V}}(q).$$

17. DEFINÍCIÓ

Definiáljuk a nemnegatív egész számok halmazán a $\otimes$ műveletet a következőképpen:

$$a \otimes b = \begin{cases} a+b, & \text{ha } a \text{ vagy } b \text{ páros;} \\ a+b-1, & \text{ha } a \text{ és } b \text{ páratlan.} \end{cases}$$

18. MEGJEGYZÉS

Figyeljük meg, hogy $a \otimes b$ akkor és csak akkor páros, ha a és b páros.

19. TÉTEL

Az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ játékok szelektív kompozíciójának Kalmár–Steinhaus-függvénye megkaphapható $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ Kalmár–Steinhaus-függvényéből a $\otimes$ művelet segítségével:

$$\kappa_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}(p, q) = \kappa_{\mathcal{U}}(p) \otimes \kappa_{\mathcal{V}}(q).$$

20. KÖVETKEZMÉNY

Az $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ játék (p, q) állása akkor és csak akkor jó, ha p és q is jó állás az $\mathcal{U}$ illetve $\mathcal{V}$ játékban.

BIZONYÍTÁS

A 9. Tétel szerint az $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ játék (p, q) állása akkor és csak akkor jó, ha $\kappa_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}(p, q)$ páros. A 18. Megjegyzés miatt $\kappa_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}(p, q) = \kappa_{\mathcal{U}}(p) \otimes \kappa_{\mathcal{V}}(q)$ akkor és csak akkor páros, ha $\kappa_{\mathcal{U}}(p)$ és $\kappa_{\mathcal{V}}(q)$ is páros. Ez pedig azt jelenti, hogy p és q jó állás az $\mathcal{U}$ illetve $\mathcal{V}$ játékban.

■

21. MEGJEGYZÉS

A fenti következményt a Kalmár–Steinhaus-függvény nélkül, csupán a mag definícióját használva is be lehet bizonyítani.

2.3. Nim játék

A nim játékot néhány csomó kaviccsal játsszuk; egy lépésben csak az egyik csomóból lehet elvenni kavicsokat, de abból bármennyit. A játék akkor ér véget, amikor az összes kavics elfogyott; az nyer aki az utolsó kavicsot elveszi (tehát normál játékról van szó).

A két csomóval játszott nim játék Sprague–Grundy-függvényét a nim-összeadás adja meg: $\gamma(a, b) = a \oplus b$ (innen az elnevezés). Figyeljük meg, hogy $a \oplus b$ akkor és csak akkor 0, ha $a = b$, tehát azok a jó állások, ahol a két csomóban ugyanannyi kavics van. (Ez a nim-összeadás nélkül is könnyen belátható.) Ezzel megkaptuk a kétcsomós nim játék nyerő stratégiáját, de a későbbiek során szükségünk lesz a Kalmár–Steinhaus-függvényére is.

22. TÉTEL

A két csomóval játszott nim Kalmár-Steinhaus-függvénye:

$$\beta(a,\, b) = \begin{cases} 2\,a, & \text{ha } a = b; \\ 2\,(a \wedge b) + 1, & \text{ha } a \neq b. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS

Az állítás igazolható a Kalmár–Steinhaus-függvény definíciója alapján, de mivel már ismerjük a nyerő stratégiát, egyszerűbb a 8. Megjegyzés segítségével bizonyítani.

Ha $a = b$, akkor $(a,\, b) = (a,\, a)$ jó állás, ezért akinek ebből az állásból kell tovább lépnie, az fog veszíteni. Késleltetni akarja a kudarcát, így csak egyet vesz el az egyik kupacból, az $(a-1,\, a)$ állásba jutva. A következő játékos a nyerő stratégiát játszva szimmetriára törekszik, ezért egyet vesz el a másik kupacból. A játszma ezekkel a stratégiákkal $2\,a$ lépésben ér véget.

Ha $a \neq b$, akkor $(a,\, b)$ rossz állás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a < b$. A nyerő stratégia alapján a soron következő játékos az $(a,\, a)$ állásba fog lépni. A fentiek szerint innen még $2\,a$ lépésig tart a játszma, tehát a lépések száma összesen $2\,a + 1 = 2\,(a \wedge b) + 1$.

■

3. A LEGO játék ismertetése

A LEGO játék egy kétszemélyes játék, melynek egy téglalap alakú LEGO-kocka a kezdőállása. A játékosok felváltva rakhatnak egyre kisebb építőkockákat egymás tetejére, így egyre kisebb és kisebb téglalapokra lesz felosztva az építmény. Amikor egy téglalpra egy építőkockát teszünk, azt mindig a téglalap valamelyik széléhez kell illesztenünk. Az illeszkedő oldalaknak egyforma hosszúaknak kell lenniük, az éppen lerakott építőkocka másik oldalának pedig rövidebbnek kell lennie, mint a téglalap megfelelő oldala (az A. Függelék ábrái mutatják egy 6×8-as kezdőállású játszma első két lehetséges lépését). A játék célja, hogy 1×1-es négyzeteket kapjunk, mivel ezekre már nem lehet kisebb építőkockát helyezni. A játékot három változatban játszhatjuk:

- diszjunktív változat (LEGO_+): egy lépésben csak egy téglalapra tehetünk építőkockát;
- konjunktív változat ($\mathrm{LEGO}_\wedge$): egyszerre minden téglalapra kell építőkockát tenni;
- szelektív változat ($\mathrm{LEGO}_\vee$): tetszőleges számú téglalapra tehetünk építőkockákat.

A konjunktív változat véget ér, amint kialakul egy 1×1-es téglalap, a diszjunktív és a szelektív változat viszont csak akkor ér véget, amikor csupa 1×1-es téglalapok vannak (a címoldal ábrája egy ilyen végállást mutat).

Mindhárom változatot játszhatjuk úgy is, hogy korlátozzuk az építmény magasságát, vagyis az egymásra helyezhető rétegek számát; ezzel végtelen sok különböző variánst kapunk. Jelöljön $(a, b)_r$ olyan $a \times b$ méretű téglalapot, amelyre még r réteget rakhatunk, megengedve az $r = \infty$ esetet is. Ha $r \geq 1$, akkor az $(a, b)_r$ állásból a következő állásokba léphetünk:

$$((a_1, b)_r, (a_2, b)_{r-1}), \text{ ahol } a_1 + a_2 = a,$$
$$((a, b_1)_r, (a, b_2)_{r-1}), \text{ ahol } b_1 + b_2 = b.$$

Az A. Függelék egy $\text{LEGO}_\vee$ játszma első néhány lépését mutatja, ahol a magasságkorlát 3. Tehát a kiinduló 6×8-as téglalapra még két réteg tehető, vagyis az 1. Ábra a $(6, 8)_2$ állást mutatja. A 2. Ábrán a piros téglalapra már csak egy réteg rakható, a szürkére pedig még kettő, tehát ez a $((6, 4)_2, (6, 4)_1)$ állás. Hasonlóan a 3. Ábra állása: $((4, 4)_2, (2, 4)_1, (2, 4)_1, (4, 4)_0)$; figyeljük meg, hogy a fekete építőkocka már „inaktív", tehát a következő lépésben legfeljebb három építőkockát lehet letenni.

Ahogy a fenti példa is mutatja, a játék állásai téglalaprendszerek, tehát egy tetszőleges p állás a következőképpen írható le:

$$p = \left((a_1, b_1)_{r_1}, (a_2, b_2)_{r_2}, \ldots, (a_k, b_k)_{r_k}\right).$$

A 14. Tétel szerint a LEGO_+ játékban $\gamma(p)$ értéke az egyes téglalapok γ-értékeinek nim-összege:

$$\gamma(p) = \gamma\left((a_1, b_1)_{r_1}\right) \oplus \gamma\left((a_2, b_2)_{r_2}\right) \oplus \ldots \oplus \gamma\left((a_k, b_k)_{r_k}\right).$$

Hasonlóan a $\text{LEGO}_\wedge$ játékban is elegendő ismerni a Kalmár–Steinhaus-függvény értékeit az egyes téglalapokon (lásd 16. Tétel):

$$\kappa(p) = \kappa\left((a_1, b_1)_{r_1}\right) \wedge \kappa\left((a_2, b_2)_{r_2}\right) \wedge \ldots \wedge \kappa\left((a_k, b_k)_{r_k}\right),$$

ugyanígy a $\text{LEGO}_\vee$ játék esetén is (lásd 19. Tétel):

$$\kappa(p) = \kappa\left((a_1, b_1)_{r_1}\right) \otimes \kappa\left((a_2, b_2)_{r_2}\right) \otimes \ldots \otimes \kappa\left((a_k, b_k)_{r_k}\right).$$

Az $(a, b)_0$ alakú állások végállások, ezért ezek Sprague–Grundy, illetve Kalmár–Steinhaus függvényértéke 0, az $r \geq 1$ esetben pedig a következőképpen számolhatóak ki a megfelelő függvényértékek. A LEGO_+ játék Sprague–Grundy-függvénye $\gamma_r(a, b) := \gamma((a, b)_r) = \text{mex}\,(H_1 \cup H_2)$, ahol

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\gamma_r(a_1, b) \oplus \gamma_{r-1}(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és} \\ H_2 &= \{\gamma_r(a, b_1) \oplus \gamma_{r-1}(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hasonlóképpen írhatjuk fel a Kalmár–Steinhaus-függvényeket a $\text{LEGO}_\wedge$ illetve $\text{LEGO}_\vee$ játékokra is: $\kappa_r(a, b) := \kappa((a, b)_r) = 1 + \text{lego}(H_1 \cup H_2)$, ahol a konjunktív játéknál

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\kappa_r(a_1, b) \wedge \kappa_{r-1}(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és} \\ H_2 &= \{\kappa_r(a, b_1) \wedge \kappa_{r-1}(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}, \end{aligned} \tag{2}$$

illetve a szelektív játéknál

$$H_1 = \{\kappa_r(a_1, b) \otimes \kappa_{r-1}(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$
$$H_2 = \{\kappa_r(a, b_1) \otimes \kappa_{r-1}(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \tag{3}$$

A fenti képletek segítségével sorra kiszámíthatjuk a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, illetve $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ függvényeket. A γ_1 és κ_1 függvények lényegében ugyanazok, mint a kétcsomós nim játék Sprague–Grundy- és Kalmár–Steinhaus-függvénye (lásd a 36. Megjegyzést). A γ_r és κ_r függvények r növekedtével egyre bonyolultabbak lesznek, ezekkel az 5. fejezetben foglalkozunk.

Ha nem korlátozzuk az építmény magasságát, akkor egyszerűbb dolgunk van, mert csak egy függvénnyel kell dolgoznunk, hiszen ebben az esetben $r = r - 1 = \infty$. Ekkor a H_1 illetve H_2 halmazok definíciója a következőképpen alakul:

– A LEGO_+ játéknál

$$H_1 = \{\gamma_\infty(a_1, b) \oplus \gamma_\infty(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$
$$H_2 = \{\gamma_\infty(a, b_1) \oplus \gamma_\infty(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \tag{4}$$

– A $\text{LEGO}_\wedge$ játéknál

$$H_1 = \{\kappa_\infty(a_1, b) \wedge \kappa_\infty(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$
$$H_2 = \{\kappa_\infty(a, b_1) \wedge \kappa_\infty(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \tag{5}$$

– A $\text{LEGO}_\vee$ játéknál

$$H_1 = \{\kappa_\infty(a_1, b) \otimes \kappa_\infty(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$
$$H_2 = \{\kappa_\infty(a, b_1) \otimes \kappa_\infty(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \tag{6}$$

4. LEGO játék magasságkorlát nélkül

Ebben a fejezetben az $r = \infty$ esettel foglalkozunk; mindhárom változatnál sikerült meghatároznunk a megfelelő γ_∞ illetve κ_∞ függvényt.

4.1. Diszjunktív változat

23. TÉTEL

A korlát nélküli LEGO_+ *játék Sprague-Grundy-függvénye:*

$$\gamma_\infty(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ha } ab \text{ páratlan;} \\ 1, & \text{ha } ab \text{ páros.} \end{cases} \tag{7}$$

BIZONYÍTÁS

Az egyszerűség kedvéért a (7) képlettel definiált γ_∞ függvényt jelölje γ a bizonyítás során. Be kell látnunk, hogy erre a γ függvényre teljesül a Sprague−Grundy-függvény definíciója, azaz

$$\gamma(a, b) = \operatorname{mex}(H_1 \cup H_2), \tag{8}$$

ahol H_1 és H_2 a (4) által definiált halmazok.
Ezt az állítást a és b paritását vizsgálva bizonyítjuk.

(i) Tételezzük fel, hogy a és b páratlan. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $a = a_1 + a_2$ felbontásban a_1 páros és a_2 páratlan. Ezért $\gamma(a_1, b) = 1$ és $\gamma(a_2, b) = 0$, ezek nim-összege 1, tehát $H_1 = \{1\}$. Hasonló gondolatmenet alapján megmutatható, hogy $H_2 = \{1\}$. Így $\operatorname{mex}(H_1 \bigcup H_2) = \operatorname{mex}(\{1\}) = 0 = \gamma(a, b)$, tehát (8) valóban teljesül.

(ii) Most tegyük fel, hogy a páratlan és b páros. A b párosságából rögtön adódik, hogy $\gamma(a_1, b) = 1$ és $\gamma(a_2, b) = 1$, melyek nim-összege 0, tehát $H_1 = \{0\}$. A b számot párossága miatt kétféleképpen lehet felbontani: b_1 és b_2 mindegyike páros vagy mindkettő páratlan. Ha mindkettő páros, akkor $\gamma(a, b_1) = 1$, $\gamma(a, b_2) = 1$. Ha b_1 és b_2 páratlan, akkor $\gamma(a, b_1) = 0$, $\gamma(a, b_2) = 0$. Tehát $\gamma(a, b_1) \oplus \gamma(a, b_2) = 0$, ezért $H_2 = \{0\}$ és így $\operatorname{mex}(H_1 \bigcup H_2) = \operatorname{mex}(\{0\}) = 1 = \gamma(a, b)$.

(iii) Ha a páros és b páratlan, akkor a (ii) esethez hasonlóan járhatunk el.

(iv) Ha a és b is páros, akkor $\gamma(a_1, b) = 1$ és $\gamma(a_2, b) = 1$, illetve $\gamma(a, b_1) = 1$ és $\gamma(a, b_2) = 1$. Tehát $H_1 = H_2 = \{0\}$, így $\operatorname{mex}(H_1 \bigcup H_2) = \operatorname{mex}(\{0\}) = 1 = \gamma(a, b)$.

■

24. KÖVETKEZMÉNY

A korlát nélküli LEGO_+ *játékban az* $(a,\ b)_\infty$ *állás akkor és csak akkor jó, ha* ab *páratlan.*

4.2. Konjunktív változat

25. DEFINÍCIÓ

Jelöljük $l(a)$-val az a természetes szám számjegyeinek számát kettes számrendszerbeli alakjában: $l(a) := \lfloor \log_2 a \rfloor + 1$.

26. MEGJEGYZÉS

Tetszőleges a természetes számra $l(a) = n$ akkor és csak akkor, ha $2^{n-1} \le a < 2^n$.

27. LEMMA

Minden a természetes számra teljesülnek a következők:

(i) *Nem léteznek olyan* a_1, a_2 *természetes számok, melyekre* $a = a_1 + a_2$ *és* $l(a) = l(a_1) = l(a_2)$.

(ii) *Bármely* $k < l(a)$ *esetén léteznek olyan* a_1, a_2 *természetes számok, hogy* $a = a_1 + a_2$ *és* $k = l(a_1) \le l(a_2)$.

BIZONYÍTÁS

(i) Tételezzük fel, hogy $a_1 + a_2 = a$ és $l(a_1) = l(a_2) = l(a) = n$. Ekkor teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &\le a_1 < 2^n, \\ 2^{n-1} &\le a_2 < 2^n. \end{aligned} \tag{9}$$

A (9)-beli két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy $2^n \le a_1 + a_2 = a < 2^{n+1}$, tehát $l(a) = n + 1$. Ez ellentmond annak, hogy $l(a) = n$.

(ii) Legyen a_1 az a legkisebb természetes szám, amelyre $l(a_1) = k$, tehát $a_1 := 2^{k-1}$, és legyen $a_2 = a - a_1$. Mivel $l(a) > k$, ezért $a \ge 2^k$, és így

$$a_2 = a - a_1 \ge 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1},$$

tehát $l(a_2) \ge k$.

■

28. TÉTEL

A korlát nélküli LEGO$_\wedge$ *játék Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$\kappa_\infty(a, b) = \beta(l(a) - 1, l(b) - 1) = \begin{cases} 2\,l(a) - 2, & \text{ha } l(a) = l(b); \\ 2\,(l(a) \wedge l(b)) - 1, & \text{ha } l(a) \ne l(b). \end{cases} \tag{10}$$

BIZONYÍTÁS

Az egyszerűség kedvéért a (10) képlettel definiált κ_∞ függvényt jelölje κ a bizonyítás során. A 23. Tételhez hasonlóan azt kell bizonyítanunk, hogy a κ függvényre teljesül a Kalmár–Steinhaus-függvény definíciója:

$$\kappa(a, b) = 1 + \operatorname{lego}(H_1 \cup H_2), \tag{11}$$

ahol H_1 és H_2 az (5) által definiált halmazok.
Az állítást $l(a)$ és $l(b)$ viszonyát vizsgálva bizonyítjuk.

(i) Tegyük fel, hogy $l(a) = l(b)$. Ekkor az a szám bármely $a = a_1 + a_2$, (az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a_1 \le a_2$) felbontására a 27. Lemma (i) állítása szerint $l(a_1) \le l(a_2) < l(a) = l(b)$, vagy $l(a_1) < l(a_2) = l(a) = l(b)$ teljesül. Az első esetben

$$\kappa(a_1, b) \wedge \kappa(a_2, b) = (2\,l(a_1) - 1) \wedge (2\,l(a_2) - 1) = 2\,l(a_1) - 1,$$

a második esetben pedig

$$\kappa(a_1, b) \wedge \kappa(a_2, b) = (2\,l(a_1) - 1) \wedge (2\,l(a) - 2) = 2\,l(a_1) - 1.$$

A 27. Lemma (ii) állítását is figyelembe véve

$$H_1 = \{\, 2k - 1 \mid k = 1, \ldots, l(a) - 1\} = \{1, 3, 5, \ldots, 2\,l(a) - 3\}.$$

Mivel $l(a) = l(b)$, ezért $H_2 = H_1$, tehát

$$1 + \text{lego}\,(H_1 \cup H_2) =$$
$$= 1 + \text{lego}\,\{1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2\,l\,(a) - 3\} = 1 + 2\,l\,(a) - 3 = 2\,l\,(a) - 2 = \kappa\,(a,\ b).$$

Ezzel beláttuk, hogy (11) teljesül.

(ii) Tételezzük fel, hogy $l(a) < l(b)$. Ha az a oldalt kettébontva lépünk, akkor az (i) esetben szereplő H_1 halmazt kapjuk. Ha a b oldalon lépünk, akkor négy esetet különböztetünk meg (az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $l(b_1) \le l(b_2)$).

a) Ha $l(a) \ne l(b_1)$ és $l(a) \ne l(b_2)$, akkor $\kappa(a,\ b_1)$ és $\kappa(a,\ b_2)$ páratlanok, ezért a minimumuk is páratlan.

b) Ha $l(a) = l(b_1) < l(b_2) \le l(b)$, akkor

$$\kappa\,(a,\ b_1) \wedge \kappa\,(a,\ b_2) = (2\,l(a) - 2) \wedge (2\,l\,(a) - 1) = 2\,l\,(a) - 2.$$

c) Ha $l(b_1) < l(a) = l(b_2) < l(b)$, akkor

$$\kappa(a,\ b_1) \wedge \kappa(a,\ b_2) = (2\,l(b_1) - 1) \wedge (2\,l(a) - 2) = 2\,l(b_1) - 1.$$

d) Ha $l(b_1) = l(b_2) = l(a) < l(b)$, akkor

$$\kappa(a,\ b_1) \wedge \kappa(a,\ b_2) = (2\,l(a) - 2) \wedge (2\,l(a) - 2) = 2\,l(a) - 2.$$

Ezek alapján a $H_1 \cup H_2$ halmazban csak páratlan számok és egy páros szám, $2\,l(a) - 2$ van, tehát $1 + \text{lego}(H_1 \cup H_2) = 1 + 2\,l(a) - 2 = 2\,l(a) - 1 = \kappa(a,\ b)$.

(iii) Az $l(a) > l(b)$ esetet a (ii) esethez hasonlóan kezelhetjük.

■

29. KÖVETKEZMÉNY

A korlát nélküli $\text{LEGO}_\wedge$ *játékban az* $(a,\ b)_\infty$ *állás akkor és csak akkor jó, ha* $l(a) = l(b)$.

30. MEGJEGYZÉS

A korlát nélküli $\text{LEGO}_\wedge$ játék izomorf a *Winning Ways* [1] második kötetében található süteményvágó játék szimmetrikus változatával (impartial Cutcakes). A 285. oldalon lévő Table 2(x) táblázat éppen a 28. Tételben megadott κ_∞ függvény értékeit tartalmazza. A korlát nélküli LEGO_+ és $\text{LEGO}_\vee$ játékokat is játszhatjuk süteménnyel: mindig egy, illetve tetszőleges számú süteménydarabot lehet kettévágni.

4.3. Szelektív változat

31. DEFINÍCIÓ

Jelölje a 2 kitevőjét az a természetes szám prímfelbontásában $\nu(a)$.

32. MEGJEGYZÉS

Tetszőleges a természetes szám esetén $\nu(a) = n$ akkor és csak akkor, ha 2^n osztója a-nak, de 2^{n+1} már nem.

33. LEMMA

(i) *Nem léteznek olyan* a_1, a_2 *természetes számok, melyekre* $a = a_1 + a_2$ *és* $\nu(a) = \nu(a_1) = \nu(a_2)$.

(ii) *Bármely* $k < \nu(a)$ *nemnegatív egész számhoz léteznek olyan* a_1, a_2 *természetes számok, hogy* $a = a_1 + a_2$ *és* $k = \nu(a_1) = \nu(a_2)$.

BIZONYÍTÁS

(i) Tegyük fel, hogy $a = a_1 + a_2$ és $\nu(a) = \nu(a_1) = \nu(a_2) = n$. Ekkor a, a_1 és a_2 prímfelbontása felírható a következő alakban:

$$a = 2^n \prod p_i^{u_i}, \tag{12}$$

$$a_1 = 2^n \prod q_i^{v_i}, \tag{13}$$

$$a_2 = 2^n \prod s_i^{w_i}, \tag{14}$$

ahol p_i, q_i, s_i páratlan prímek. A (13) és (14) egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy

$$a = a_1 + a_2 = 2^n \prod q_i^{v_i} + 2^n \prod s_i^{w_i} = 2^n \left(\prod q_i^{v_i} + \prod s_i^{w_i}\right).$$

Mivel $\prod q_i^{v_i}$ és $\prod s_i^{w_i}$ páratlan számok, így az összegük páros, ezért $2^{n+1} \mid a$, ami ellentmond (12)-nek.

(ii) Legyen a_1 az a legkisebb természetes szám melyre $\nu(a_1) = k$, azaz $a_1 = 2^k$, és legyen $a_2 = a - a_1$. Mivel $k < \nu(a)$, ezért $2^{k+1} \mid a$, így $a_2 > 0$ és $2^k \mid a_2$. Ha $2^{k+1} \mid a_2$, akkor $2^{k+1} \mid a - a_2 = 2^k$, amely ellentmondáshoz vezet. Következésképp $k = \nu(a_1) = \nu(a_2)$.

■

34. TÉTEL

A korlát nélküli LEGO$_\vee$ *játék Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$\kappa_\infty(a, b) = \begin{cases} ab - 1, & \text{ha } \nu(a) = 0 \text{ vagy } \nu(b) = 0; \\ ab - 2, & \text{ha } \nu(a) = \nu(b) \geq 1; \\ ab - 3 & \text{különben.} \end{cases} \tag{15}$$

BIZONYÍTÁS

Az egyszerűség kedvéért a (15) képlettel definiált κ_∞ függvényt jelölje κ a bizonyítás során. A 28. Tételhez hasonlóan azt kell igazolnunk, hogy a κ függvényre teljesül

$$\kappa(a, b) = 1 + \mathrm{lego}(H_1 \cup H_2), \tag{16}$$

ahol H_1 és H_2 a (6) által definiált halmazok.

(i) Tételezzük fel, hogy $\nu(a) = 0$ és $\nu(b) = 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $a = a_1 + a_2$ felbontásban a_1 páratlan és a_2 páros. Ekkor $\kappa(a_1, b) = a_1 b - 1$ és $\kappa(a_2, b) = a_2 b - 1$, így

$$\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b) = (a_1 b - 1) \otimes (a_2 b - 1) = a_1 b + a_2 b - 2 = ab - 2.$$

Tehát $H_1 = \{ab - 2\}$, hasonlóan $H_2 = \{ab - 2\}$. Következésképp

$$1 + \text{lego}(H_1 \bigcup H_2) = 1 + \text{lego}\{ab - 2\} = 1 + ab - 2 = ab - 1 = \kappa(a, b),$$

így (16) teljesül.

(ii) Ha $\nu(a) = 0$ és $\nu(b) \geq 1$, akkor azt kell belátnunk, hogy $\text{lego}(H_1 \bigcup H_2) = ab - 2$. Vegyük észre, hogy $\kappa(a, b)$ akkor és csak akkor páros, ha $\nu(a) = \nu(b)$. Először a H_1 halmazt vizsgáljuk: $\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b)$ akkor és csak akkor páros, ha $\kappa(a_1, b)$ és $\kappa(a_2, b)$ páros, a 18. Megjegyzés miatt. Ez csak akkor igaz, ha $\nu(a_1) = \nu(b)$ és $\nu(a_2) = \nu(b)$. Ez ellentmondáshoz vezet, mert ekkor $a = a_1 + a_2$ páros lenne, tehát H_1-nek nincs páros eleme. A H_2 halmaz $\kappa(a, b_1) \otimes \kappa(a, b_2)$ eleme akkor páros, ha $\kappa(a, b_1)$ és $\kappa(a, b_2)$ páros, vagyis $\nu(a) = \nu(b_1)$ és $\nu(a) = \nu(b_2)$, tehát $\nu(b_1) = \nu(b_2) = 0$. Ez lehetséges (pl. $b_1 = 1$, $b_2 = b - 1$), és ekkor $\kappa(a, b_1) \otimes \kappa(a, b_2) = (ab_1 - 1) \otimes (ab_2 - 1) = ab - 2$. Tehát $H_1 \bigcup H_2$ egyetlen páros eleme $ab - 2$, így $\text{lego}(H_1 \bigcup H_2) = ab - 2$.

(iii) A $\nu(b) = 0$ és $\nu(a) \geq 1$ eset hasonlóan bizonyítható, mint a (ii) eset.

(iv) Tegyük fel, hogy $\nu(a) = \nu(b) \geq 1$. Ekkor a-t két páros vagy két páratlan szám összegére bonthatjuk fel. Ha a_1 és a_2 páratlan, akkor $\kappa(a_1, b) = a_1 b - 1$ és $\kappa(a_2, b) = a_2 b - 1$, így $\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b) = (a_1 b - 1) \otimes (a_2 b - 1) = ab - 3$. Ha a_1 és a_2 páros, akkor a 33. Lemma alapján $\nu(a_1) \neq \nu(b)$ vagy $\nu(a_2) \neq \nu(b)$.

a) Ha $\nu(a_1) \neq \nu(b)$ és $\nu(a_2) \neq \nu(b)$, akkor

$$\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b) = (a_1 b - 3) \otimes (a_2 b - 3) = ab - 7.$$

b) Ha $\nu(a_1) = \nu(b)$ és $\nu(a_2) \neq \nu(b)$, akkor

$$\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b) = (a_1 b - 2) \otimes (a_2 b - 3) = ab - 5.$$

c) Ha $\nu(a_1) \neq \nu(b)$ és $\nu(a_2) = \nu(b)$, akkor

$$\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b) = (a_1 b - 3) \otimes (a_2 b - 2) = ab - 5.$$

Tehát $\{ab - 3\} \subseteq H_1 \subseteq \{ab - 3, ab - 5, ab - 7\}$, és hasonló érvényes a H_2 halmazra is. Így

$$1 + \text{lego}(H_1 \bigcup H_2) =$$
$$1 + \text{lego}\{ab - 3, ab - 5, ab - 7\} = 1 + ab - 3 = ab - 2 = \kappa(a, b),$$

ahol $ab-5$ és $ab-7$ nem biztos, hogy előfordul, de ez a tény nem változtat a lego művelet eredményén.

(v) Végül a $\nu(a) \neq \nu(b)$ és $\nu(a), \nu(b) \geq 1$ esetet vizsgáljuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\nu(a) > \nu(b)$. Ebben az esetben is elég a $H_1 \bigcup H_2$-beli páros elemeket megtalálni. A H_1 halmaz $\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b)$ eleme akkor páros, ha $\nu(a_1) = \nu(a_2) = \nu(b)$; ez lehetséges a 33. Lemma (ii) része miatt. Ekkor $\kappa(a_1, b) \otimes \kappa(a_2, b) = (a_1 b - 2) \otimes (a_2 b - 2) = ab - 4$. A H_2 halmazban nincs páros elem, mert nincs olyan $b = b_1 + b_2$ felbontása b-nek, ahol $\nu(b_1) = \nu(b_2) = \nu(a) > \nu(b)$. Tehát $H_1 \bigcup H_2$ egyetlen páros eleme $ab-4$, így $\mathrm{lego}(H_1 \bigcup H_2) = ab - 4$. Ezért $1 + \mathrm{lego}(H_1 \bigcup H_2) = ab - 3 = \kappa(a, b)$, így (16) teljesül.

■

35. KÖVETKEZMÉNY

A korlát nélküli $\mathrm{LEGO}_\vee$ *játékban az* $(a, b)_\infty$ *állás akkor és csak akkor jó, ha* $\nu(a) = \nu(b)$.

5. LEGO játék magasságkorláttal

Ebben a fejezetben a LEGO játék azon változatait vizsgáljuk, melyeknél a rétegek számát korlátozzuk. Emlékeztetőül: $(a, b)_r$ olyan $a \times b$ méretű téglalapot jelöl melyre még r réteg építőkockát rakhatunk.

36. MEGJEGYZÉS

Az $(a, b)_1$ állásból az $((a_1, b)_1, (a_2, b)_0)$, illetve $((a, b_1)_1, (a, b_2)_0)$ alakú állásokba léphetünk, ahol $a = a_1 + a_2$, illetve $b = b_1 + b_2$. Az $(a_2, b)_0$, illetve $(a, b_2)_0$ téglalapok végállások, ezért a játszma további részében figyelmen kívül hagyhatók. Így lényegében az $a \times b$ méretű téglalapból $a_1 \times b$ $(a_1 < a)$, illetve $a \times b_1$ $(b_1 < b)$ méretű téglalapokba léphetünk. Az „aktív" téglalap egyik oldala csökken, a másik pedig változatlan marad, tehát kétcsomós nim játékot játszunk. (Figyeljük meg, hogy itt nincs különbség a diszjunktív, konjunktív és szelektív változatok között, hiszen mindig csak egy „aktív" téglalap van.) Mivel a végállás 1×1-es téglalap, az $(a, b)_1$ állás a kétcsomós nim játék $(a-1, b-1)$ állásának felel meg. Tehát $\gamma_1(a, b) = (a-1) \oplus (b-1)$ és $\kappa_1(a, b) = \beta(a-1, b-1)$.

Az $r \geq 2$ esetben már külön kell vizsgálni a változatokat.

A B. Függelékben található *Mathematica* program az (1) képlet alapján kiszámítja a LEGO_+ játék γ_2 függvényének értékeit; ezek az 1. Táblázatban találhatók. A 2. Táblázatban feketével a jó, fehérrel a rossz állásokat jelöltük, de nem sikerült megsejtenünk a nyerő stratégiát.

5.1. Konjunktív változat

A diszjunktív esethez hasonlóan a C. Függelék tartalmazza a LEGO$_\wedge$ játék Kalmár–Steinhaus-függvényét kiszámító *Mathematica* programot, és a kapott értékek táblázatait. A jó állások a főátló mentén elhelyezkedő négyzetekben találhatók. Az $r = 2$ esetben a négyzetek oldalhosszai: 1,2,3,4,5,... (lásd a 4. Táblázatot); kézenfekvő a sejtés, hogy az n-edik négyzet oldalhossza n. Az $r = 3$ esetben a négyzetek oldalhosszai: 1,2,4,7,11,16,22,29,37,... (lásd a 6. Táblázatot). Az Online Encyclopedia of Integer Sequences [7] segítségével azt sejtjük, hogy itt az n-edik négyzet oldalhossza $\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}$; ez a szám megadja, hogy hány részre osztja a síkot $n-1$ általános helyzetű egyenes (lásd az A000124 sorozatot az Enciklopédiában). Az $r = 4$ esetben a négyzetek oldalhosszai: 1,2,4,8,15,26,42,64,93,... (lásd a 8. Táblázatot). Itt azt sejtjük, hogy az n-edik négyzet oldalhossza $\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}$; ez a szám megadja, hogy hány részre osztja a teret $n-1$ általános helyzetű sík (lásd az A000125 sorozatot az Enciklopédiában).

Mindezek alapján azt várjuk, hogy tetszőleges r esetén a κ_r függvény páros értékei a főátló mentén elhelyezkedő

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{r-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{17}$$

oldalhosszúságú négyzetekben találhatók. A következőkben bevezetünk néhány jelölést, amelyek segítségével pontosabban megfogalmazhatjuk a sejtést, majd be is bizonyítjuk azt.

37. MEGJEGYZÉS

A 28. Tétel alapján a magasságkorlát nélküli LEGO$_\wedge$ játék jó állásai szintén a főátló mentén elhelyezkedő négyzetekben találhatók, ahol az n-edik négyzet oldalhossza 2^{n-1}. Figyeljük meg, hogy ha $r \to \infty$, akkor a fenti (17) összeg határértéke 2^{n-1}, tehát $\lim_{r\to\infty} \kappa_r = \kappa_\infty$.

38. DEFINÍCIÓ

Tetszőleges $r,n \in \mathbb{N}_0$ esetén legyen

$$c_r(n) = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{r}, \tag{18}$$

továbbá legyen $c_\infty(n) = 2^n$.

39. MEGJEGYZÉS

Ha $r \ge n$, akkor $c_r(n) = 2^n$, tehát $\lim_{r\to\infty} c_r(n) = 2^n$; ezért használjuk a $c_\infty(n) = 2^n$ jelölést. A $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$,..., $(r,\ 2^r)$ pontokra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinom:

$$\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\ldots+\binom{x}{r}=1+x+\frac{x(x-1)}{2}+\ldots+\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}. \tag{19}$$

Ennek a polinomnak a nemnegatív egész helyeken fevett értékei a $c_r(n)$ számok, melyeknek a következő geometriai jelentése is van: az r-dimenziós teret n általános helyzetű hipersík $c_r(n)$ tartományra osztja fel.

40. LEMMA

Minden r,n pozitív egész számra $c_{r-1}(n-1)+c_r(n-1)=c_r(n)$.

BIZONYÍTÁS

A jól ismert $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ összefüggést felhasználva bizonyítjuk az állítást:

$$c_{r-1}(n-1)+c_r(n-1)=$$
$$=\binom{n-1}{0}+\ldots+\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{0}+\ldots+\binom{n-1}{r}=$$
$$=\binom{n-1}{0}+\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right]+\ldots+\left[\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}\right]=$$
$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{r}=c_r(n).$$

■

41. DEFINÍCIÓ

Tetszőleges $r\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ esetén definiáljuk a $\|\cdot\|_r:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ leképezést a következőképpen: legyen $\|a\|_r=n$ akkor és csak akkor, ha $c_r(n-1)\le a<c_r(n)$. Vegyük észre, hogy $\|a\|_\infty=l(a)$ (lásd a 25. Definíciót).

42. MEGJEGYZÉS

A 40. Lemma alapján az $\|1\|_r$, $\|2\|_r$, $\|3\|_r$, ... sorozat a következő:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 4,\ \ldots, \tag{20}$$

ahol $c_{r-1}(1)$ kettes, $c_{r-1}(2)$ hármas, $c_{r-1}(3)$ négyes, ... szerepel.

43. LEMMA

Minden $r,a\ge 2$ természetes számok esetén $\|a-1\|_r\le\|a\|_r$ és $\|a\|_{r-1}\ge\|a\|_r$.

BIZONYÍTÁS

Először az első egyenlőtlenséget bizonyítjuk a 41. Definíció felhasználásával. Legyen $\|a\|_r=n$, ekkor $c_r(n-1)\le a<c_r(n)$. Mivel $a-1<a$, így $a-1<c_r(n)$, tehát $\|a-1\|_r\le n$. A második egyenlőtlenség bizonyításánál a

$c_{r-1}(n-1) \le c_r(n-1)$ egyenlőtlenséget használva kapjuk, hogy $c_{r-1}(n-1) \le a$, tehát $\|a\|_{r-1} \ge n$.

■

44. LEMMA

Ha $a = a_1 + a_2$ és $\|a_1\|_r = \|a\|_r$, akkor $\|a_2\|_{r-1} < \|a\|_r$.

BIZONYÍTÁS

Tegyük fel, hogy $\|a\|_r = \|a_1\| = n$, ekkor

$$c_r(n-1) \le a_1,\ a < c_r(n).$$

A 40. Lemma segítségével kapjuk, hogy

$$a_2 = a - a_1 < c_r(n) - c_r(n-1) = c_{r-1}(n-1),$$

tehát $\|a_2\|_{r-1} < n$.

■

45. LEMMA

Minden b pozitív egész szám és $k < \|b\|_r$ esetén léteznek olyan b_1, b_2 pozitív egészek, amelyekre $b = b_1 + b_2$ és $\|b_1\|_r = k$, $\|b_2\|_{r-1} \ge k$.

BIZONYÍTÁS

Legyen b_1 az a legkisebb pozitív egész, melyre $\|b_1\|_r = k$, tehát $b_1 = c_r(k-1)$. A $k < \|b\|_r$ feltétel miatt $c_r(k) \le b$, és így

$$b_2 = b - b_1 \ge c_r(k) - c_r(k-1) = c_{r-1}(k-1),$$

tehát $\|b_2\|_{r-1} \ge k$.

■

46. TÉTEL

A LEGO$_\wedge$ *játék Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$\kappa_r(a,\ b) = \beta(\|a\|_r - 1,\ \|b\|_r - 1) = \begin{cases} 2\,\|a\|_r - 2, & \text{ha } \|a\|_r = \|b\|_r; \\ 2\,(\|a\|_r \wedge \|b\|_r) - 1, & \text{ha } \|a\|_r \ne \|b\|_r. \end{cases} \tag{21}$$

BIZONYÍTÁS

A Kalmár–Steinhaus-függvény definíciója szerint azt kell belátnunk, hogy minden $a,\ b \in \mathbb{N}$ esetén

$$\kappa_r(a,\ b) = 1 + \mathrm{lego}(H_1 \cup H_2), \tag{22}$$

ahol H_1 és H_2 a (2) által definiált halmazok.
Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy $\|a\|_r$ és $\|b\|_r$ egyenlő-e vagy sem.

(i) Elsőként tegyük fel, hogy $\|a\|_r = \|b\|_r =: n$. Ekkor $\kappa_r(a,\ b) = 2\,n - 2$, tehát a bizonyítandó (22) egyenlőség azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{lego}(H_1 \cup H_2) = 2\,n - 3$. Tehát be kell látnunk, hogy $2\,n - 3 \in H_1 \cup H_2$, és minden $u \in H_1 \cup H_2$ esetén

$$u \le 2\,n - 3 \;\text{ és }\; u\,\text{páratlan}. \tag{23}$$

Legyen $u = \kappa_r(a_1,\, b) \wedge \kappa_{r-1}(a_2,\, b)$ a H_1 halmaz egy tetszőleges eleme.

Ha $\|a_1\|_r = n$, akkor a 43. és 44. Lemma szerint $\|a_2\|_{r-1} < n = \|b\|_r \le \|b\|_{r-1}$, tehát

$$\begin{aligned} u &= (2\,n - 2) \wedge (2\,(\|a_2\|_{r-1} \wedge \|b\|_{r-1}) - 1) \\ &= (2\,n - 2) \wedge (2\,\|a_2\|_{r-1} - 1) \\ &= 2\,\|a_2\|_{r-1} - 1 \le 2\,n - 3, \end{aligned}$$

így u valóban páratlan és $u \le 2\,n - 3$.
Ha $\|a_1\|_r < n$, akkor

$$u = (2\,\|a_1\|_r - 1) \wedge \kappa_{r-1}(a_2,\, b) \le 2\,\|a_1\|_r - 1 \le 2\,n - 3.$$

Ha $\kappa_{r-1}(a_2,\, b)$ páratlan, akkor u is páratlan, ezért (23) teljesül. Ha $\kappa_{r-1}(a_2,\, b)$ páros, akkor $\|a_2\|_{r-1} = \|b\|_{r-1} \ge n$. Ekkor $\kappa_{r-1}(a_2,\, b) = 2\,\|b\|_{r-1} - 2 \ge 2\,n - 2$, ezért $u = 2\,\|a_1\|_r - 1 \le 2\,n - 3$.

Hasonlóan a H_2 halmaz elemeire is igazolható (23).

Be kell még látnunk, hogy $2\,n - 3 \in H_1 \cup H_2$. Alkalmazzuk a 45. Lemmát a $k = n - 1$ értékre. Ekkor $\|b_1\|_r = n - 1$ és $\|b_2\|_{r-1} \ge n - 1$, így $\kappa_r(a,\, b_1) = 2\,(n \wedge (n - 1)) - 1 = 2\,n - 3$. Ha $\|a\|_{r-1} = \|b_2\|_{r-1}$, akkor $\kappa_{r-1}(a,\, b_2) = 2\,\|a\|_{r-1} - 2 \ge 2\,n - 2$, tehát $u = 2\,n - 3 \in H_2$. Ha $\|a\|_{r-1} \ne \|b_2\|_{r-1}$, akkor

$$\kappa_{r-1}\,(a,\, b_2) = 2\,(\|a\|_{r-1} \wedge \|b_2\|_{r-1}) - 1 \ge 2\,(n \wedge (n - 1)) - 1 = 2\,n - 3,$$

így $u = 2\,n - 3 \in H_2$.

(ii) Most tegyük fel, hogy $\|a\|_r \ne \|b\|_r$; az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $n := \|a\|_r < \|b\|_r$. Ekkor $\kappa_r(a,\, b) = 2\,n - 1$, tehát a bizonyítandó (22) egyenlőség azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{lego}(H_1 \cup H_2) = 2\,n - 2$, vagyis igazolnunk kell, hogy $2\,n - 2 \in H_1 \cup H_2$, és $v \in H_1 \cup H_2$ esetén

$$\text{ha}\; v\,\text{páros},\; \text{akkor}\;\; v \ge 2\,n - 2\,. \tag{24}$$

Legyen $v = \kappa_r(a_1,\, b) \wedge \kappa_{r-1}(a_2,\, b)$ a H_1 halmaz egy tetszőleges eleme, és tegyük fel, hogy v páros. Mivel $\|a_1\|_r \le \|a\|_r = n < \|b\|_r$, ezért $\kappa_r(a_1,\, b) = 2\,\|a_1\|_r - 1 \le 2\,n - 1$. Ebből következik, hogy $\kappa_{r-1}(a_2,\, b)$ páros, és $\kappa_{r-1}(a_2,\, b) \le 2\,n - 2$, ez pedig azt jelenti, hogy $\|a_2\|_{r-1} = \|b\|_{r-1} \le n$. Másrészt $\|b\|_{r-1} \ge \|b\|_r > n$. Ez az ellentmodás azt mutatja, hogy H_1-nek nincs páros eleme.

Legyen most $v = \kappa_r(a,\, b_1) \wedge \kappa_{r-1}(a,\, b_2)$ a H_2 halmaz egy tetszőleges eleme, és tegyük fel, hogy v páros. Ha $\kappa_r(a,\, b_1) \le \kappa_{r-1}(a,\, b_2)$, akkor $v = \kappa_r(a,\, b_1)$ páros szám. Ekkor $n = \|a\|_r = \|b_1\|_r$, tehát $v = 2n-2$, és így (24) valóban teljesül. Ha $\kappa_r(a, b_1) \geq \kappa_{r-1}(a, b_2)$, akkor $v = \kappa_{r-1}(a, b_2)$ páros szám. Ekkor $n \leq \|a\|_{r-1} = \|b_2\|_{r-1}$, tehát $v \geq 2n-2$, és így (24) teljesül.

Be kell még látnunk, hogy $2n-2 \in H_2$. Alkalmazzuk a 45. Lemmát a $k = n$ értékre. Ekkor $\|b_1\|_r = n$ és $\|b_2\|_{r-1} \geq n$, így $\kappa_r(a, b_1) = 2n-2$. Ha $\|a\|_{r-1} = \|b_2\|_{r-1} \geq n$, akkor $\kappa_{r-1}(a, b_2) \geq 2n-2$. Ha $\|a\|_{r-1} \neq \|b_2\|_{r-1} \geq n$, akkor $\kappa_{r-1}(a, b_2) \geq 2n-1$. Tehát mindkét esetben $\kappa_r(a, b_1) \wedge \kappa_{r-1}(a, b_2) = 2n-2$, vagyis $2n-2 \in H_2$.

■

5.2. Szelektív változat

A szelektív változat sokkal bonyolultabbnak tűnik, mint a konjunktív: itt csak $r = 2$ esetén sikerült leírnunk a jó állásokat, amelyek a D. Függelék 10. Táblázatában láthatók. Meglepő módon az $\frac{a}{b}$ tört lánctört alakjától függ, hogy az $(a, b)_2$ állás jó-e vagy sem. Ezért röviden ismertetjük a lánctörtekkel kapcsolatos szükséges tudnivalókat (lánctörtekről bővebben az [5] jegyzetben olvashatunk).

Legyenek $b \geq a > 0$ természetes számok, és végezzük el rajtuk az euklideszi algortimust:

$$\begin{array}{rclclcrclcl}
b & = & aq_0 & + & r_0 & \longrightarrow & \frac{b}{a} & = & q_0 & + & \frac{r_0}{a}, \\
a & = & r_0 q_1 & + & r_1 & \longrightarrow & \frac{a}{r_0} & = & q_1 & + & \frac{r_1}{r_0}, \\
r_0 & = & r_1 q_2 & + & r_2 & \longrightarrow & \frac{r_0}{r_1} & = & q_2 & + & \frac{r_2}{r_1}, \\
 & & & & & \dots & & & & & \\
r_{n-1} & = & r_n q_{n+1} & & & \longrightarrow & \frac{r_{n-1}}{r_n} & = & q_{n+1}. & &
\end{array}$$

A $\frac{b}{a}, \frac{a}{r_0}, \frac{r_0}{r_1}, \dots, \frac{r_{n-1}}{r_n}$ törtek fenti kifejezéseinek segítségével fel tudjuk írni $\frac{b}{a}$ lánctört alakját:

$$\frac{b}{a} = q_0 + \frac{r_0}{a} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \dots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots \frac{1}{q_{n+1}}}}.$$

Ezt a lánctörtet $\langle q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \rangle$ jelöli, a q_i számokat a lánctört jegyeinek nevezzük. Ha $a < b$, akkor az $\frac{a}{b}$ tört lánctört alakja $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = 0 + \frac{1}{q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots \frac{1}{q_{n+1}}}}} = \langle 0, q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \rangle$.

47. DEFINÍCIÓ

Jelölje $Q(b, a)$ a $\frac{b}{a}$ tört lánctört alakjában szereplő jegyek összegét.

48. LEMMA

Bármely $a, b \in \mathbb{N}$ esetén $Q(b, a) = Q(a, b)$.

BIZONYÍTÁS

Ha $a = b$, akkor triviális az állítás, tehát feltehető, hogy $a < b$. Ha $\frac{b}{a} = \langle q_0, q_1, \ldots, q_{n+1} \rangle$, akkor $Q(b, a) = q_0 + q_1 + \ldots + q_{n+1}$, illetve $\frac{a}{b} = \langle 0, q_0, q_1, \ldots, q_{n+1} \rangle$, így $Q(a, b) = 0 + q_0 + q_1 + \ldots + q_{n+1} = Q(b, a)$.

■

49. LEMMA

Bármely $a < b$ természetes számok esetén $Q(b, a) = Q(b - a, a) + 1$.

BIZONYÍTÁS

Legyen $\frac{b-a}{a} = \langle q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1} \rangle$. Ekkor

$$\frac{b}{a} = \frac{b-a}{a} + 1 = \langle q_0 + 1, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1} \rangle,$$

így $Q(b, a) = Q(b - a, a) + 1$ teljesül.

■

50. LEMMA

A LEGO$_V$ *játékban $a = b$ esetén az $(a, b)_2$ állás jó. Ha $a < b$, akkor az $(a, b)_2$ állás akkor és csak akkor jó, ha az $(a, b - a)_2$ állás rossz.*

BIZONYÍTÁS

Először tegyük fel, hogy $a = b$. Ekkor az $(a, b)_2$ állásból elérhető $((a_1, b)_2, (a_2, b)_1)$ alakú állások mind rosszak a 20. Következmény szerint, hiszen $a_2 < b$ miatt az $(a_2, b)_1$ állás rossz (lásd a 36. Megjegyzést). Hasonlóképpen a b oldal felbontása esetén is megkapható, hogy $(a, b_2)_1$ rossz állás. Tehát az $(a, b)_2$ állásból csak rossz állásba lehet lépni, ezért $(a, b)_2$ jó állás.
Most tegyük fel, hogy $a < b$. Ha $(a, b)_2$ jó állás, akkor a belőle elérhető állások mind rosszak, így az $((a, b - a)_2, (a, a)_1)$ állás is rossz. Mivel $(a, a)_1$ jó állás, a 20. Következmény miatt $(a, b - a)_2$ rossz állás. Ha $(a, b)_2$ rossz állás, akkor lehet belőle jó állásba lépni. Az $((a_1, b)_2, (a_2, b)_1)$ alakú állások mind rosszak, mert $a_2 < b$ miatt $(a_2, b)_1$ rossz állás. Egy $((a, b_1)_2, (a, b_2)_1)$ alakú állás pedig csak akkor lehet jó, ha $b_2 = a$. Tehát az $(a, b)_2$ állásból az egyetlen lehetséges jó lépés $((a, b - a)_2, (a, a)_1)$. Következésképp a 20. Következmény szerint $(a, b - a)_2$ jó állás.

■

51. TÉTEL

A $\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}$ *játékban az* $(a,\ b)_1$ *állás akkor és csak akkor jó, ha* $a = b$. *Az* $(a,\ b)_2$ *állás akkor és csak akkor jó, ha* $Q(a,\ b)$ *páratlan.*

BIZONYÍTÁS

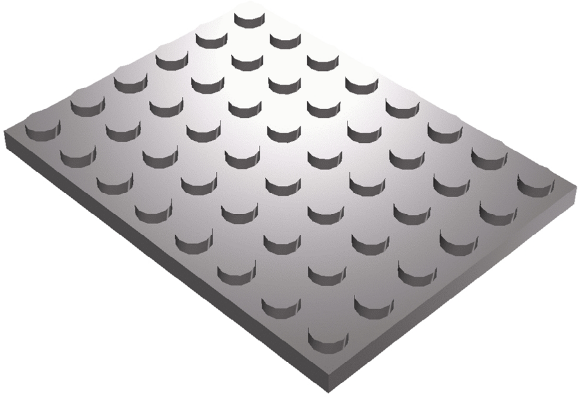
Az $(a,\ b)_1$ állásra vonatkozó állítás következik a 36. Megjegyzésből.

Az $(a,\ b)_2$ állásra vonatkozó állítást $|a-b|$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $|a-b| = 0$, akkor $Q(a,\ b) = 1$ és az 50. Lemma szerint $(a,\ b)_2$ valóban jó állás. Most tegyük fel, hogy $|a-b| < n$ esetén $(a,\ b)_2$ akkor és csak akkor jó állás, ha $Q(a,\ b)$ páratlan. Legyen $(a,\ b)_2$ egy tetszőleges állás, ahol $|a-b| = n$. Mivel $Q(a,\ b) = Q(b,\ a)$ teljesül, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a < b$. Az indukciós feltevés szerint az $(a,\ b-a)_2$ állás akkor és csak akkor jó, ha $Q(a,\ b-a)$ páratlan. Tehát a 49. Lemmát és az 50. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy $(a,\ b)_2$ akkor és csak akkor rossz, ha $Q(a,\ b)$ páros.

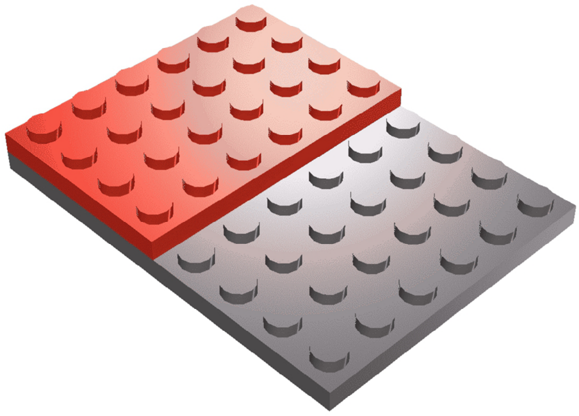
■

Függelék

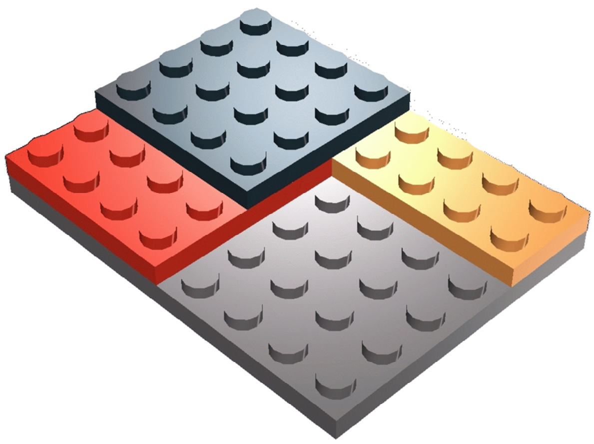
A. LEGO játék



1. Ábra



2. Ábra



3. Ábra

B. LEGO$_+$

A 36. Megjegyzésben szereplő γ_1 függvény:

```
gamma1[a_, b_] := BitXor[a - 1, b - 1]
```

Definiáljuk a mex műveletet:

```
mex[list_] :=
 Module[{m, list0 = list, telj},
  m = Max[list0];
  telj = Table[i, {i, 0, m + 1, 1}];
  Min[Complement[telj, list0]]
 ]
```

A 3. fejezet (1) képlete által definiált γ_2 függvény:

```
gamma2[1, 1] = 0;
gamma2[a_, b_] :=
 Module[{a0 = a, b0 = b, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[gamma2[a1, b0], gamma1[a0 - a1, b0]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[BitXor[gamma2[a0, b1], gamma1[a0, b0 - b1]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  gamma2[a0, b0] = mex[unio]
 ]
```

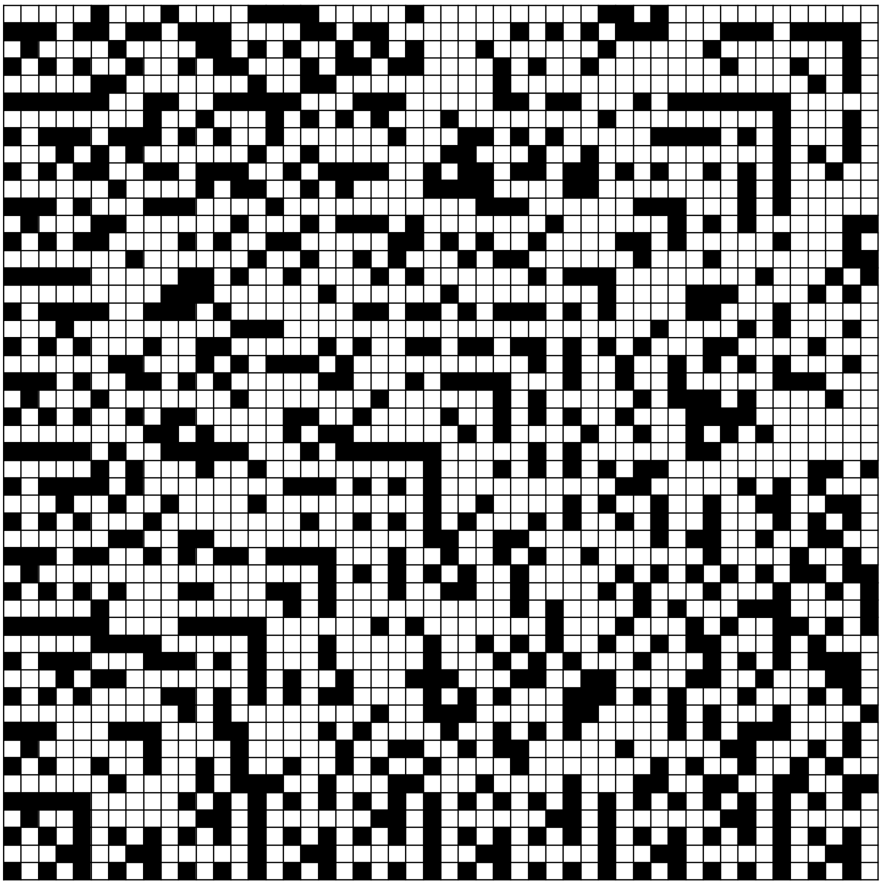
A γ_2 függvény értékeinek táblázata (1. Táblázat, az (1, 1) állás a bal alsó sarokban található) és a jó állások táblázata (2. Táblázat, feketével jelöltük a jó állásokat, fehérrel pedig a rossz állásokat):

```
Table[gamma2[a, b], {a, 15, 1, -1}, {b, 1, 15, 1}] //
 MatrixForm
```

```
data = Table[gamma2[a, b], {a, 50, 1, -1}, {b, 1, 50, 1}];
ArrayPlot[data, ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &),
 ColorFunctionScaling → False, Mesh → All, MeshStyle → Black]
```

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 2 & 7 & 1 & 5 & 0 & 5 \\
0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

1. Táblázat



2. Táblázat

C. LEGO$_\wedge$

A 36. Megjegyzésben szereplő κ_1 függvény:

```
kappak1[{a_, b_} /; a == b] := kappak1[{a, b}] = 2 a - 2
kappak1[{a_, b_} /; a < b] := kappak1[{a, b}] = 2 a - 1
kappak1[{a_, b_}] := kappak1[{a, b}] = 2 b - 1
```

Definiáljuk a lego műveletet:

```
lego[list_] :=
 Module[{list0 = list, l},
  l = Select[list0, EvenQ];
  If[Length[l] == 0, Max[list0], Min[l]]
 ]
```

A 3. fejezet (2) képlete által definiált κ_2 függvény:

```
kappak2[{1, 1}] = 0;
kappak2[{a_, b_}] :=
 Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},
  H1 = Table[Min[kappak2[{a1, b0}], kappak1[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Min[kappak2[{a0, b1}], kappak1[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  kappak2[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]
 ]
```

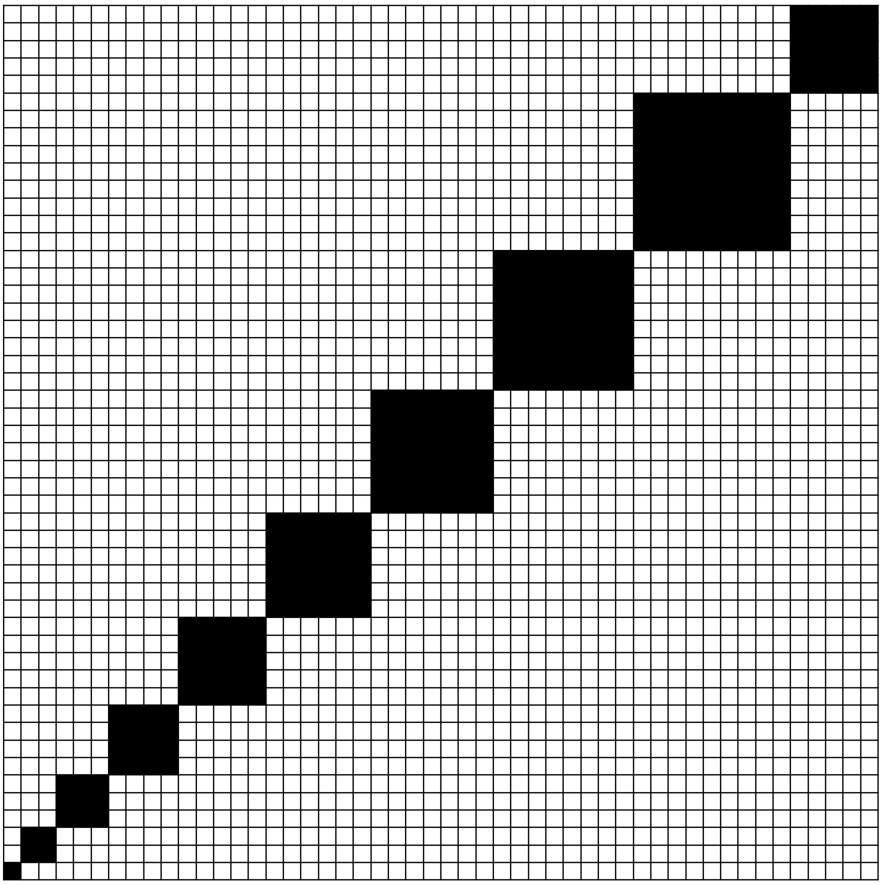
A κ_2 függvény értékeinek táblázata (3. Táblázat) és a jó állások táblázata (4. Táblázat):

```
Table[kappak2[{a, b}],
  {a, 15, 1, -1}, {b, 1, 15, 1}] // MatrixForm
```

```
datak2 =
  Table[kappak2[{a, b}], {a, 50, 1, -1}, {b, 1, 50, 1}];
ArrayPlot[datak2, ColorFunction ->
  (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
 ColorFunctionScaling → False, Mesh → All, MeshStyle → Black]
```

$$\begin{pmatrix}
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

3. Táblázat



4. Táblázat

A 3. fejezet (2) képlete által definiált κ_3 függvény:

```
kappak3[{1, 1}] = 0;
kappak3[{a_, b_}] :=
 Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},
  H1 = Table[Min[kappak3[{a1, b0}], kappak2[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Min[kappak3[{a0, b1}], kappak2[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  kappak3[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]
 ]
```

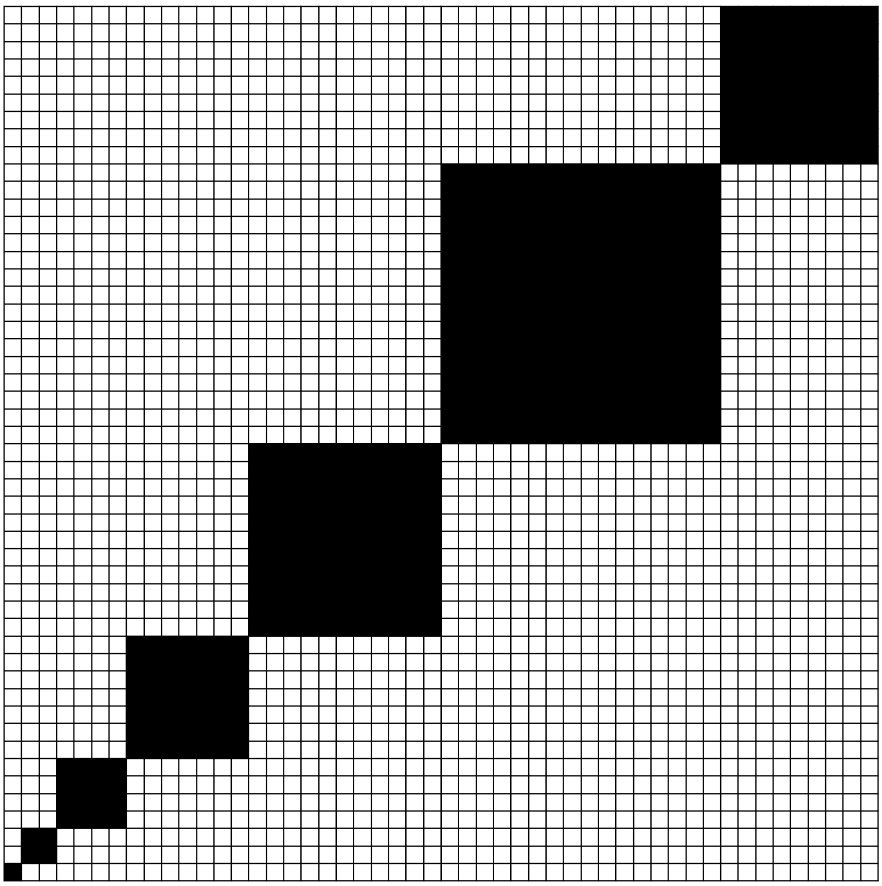
A κ_3 függvény értékeinek táblázata (5. Táblázat) és a jó állások táblázata (6. Táblázat):

```
Table[kappak3[{a, b}],
  {a, 15, 1, -1}, {b, 1, 15, 1}] // MatrixForm
```

```
datak3 =
  Table[kappak3[{a, b}], {a, 50, 1, -1}, {b, 1, 50, 1}];
ArrayPlot[datak3, ColorFunction ->
  (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
 ColorFunctionScaling → False, Mesh → All, MeshStyle → Black]
```

$$
\begin{pmatrix}
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

5. Táblázat



6. Táblázat

A 3. fejezet (2) képlete által definiált κ_4 függvény:

```
kappak4[{1, 1}] = 0;
kappak4[{a_, b_}] :=
 Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},
  H1 = Table[Min[kappak4[{a1, b0}], kappak3[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Min[kappak4[{a0, b1}], kappak3[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  kappak4[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]
 ]
```

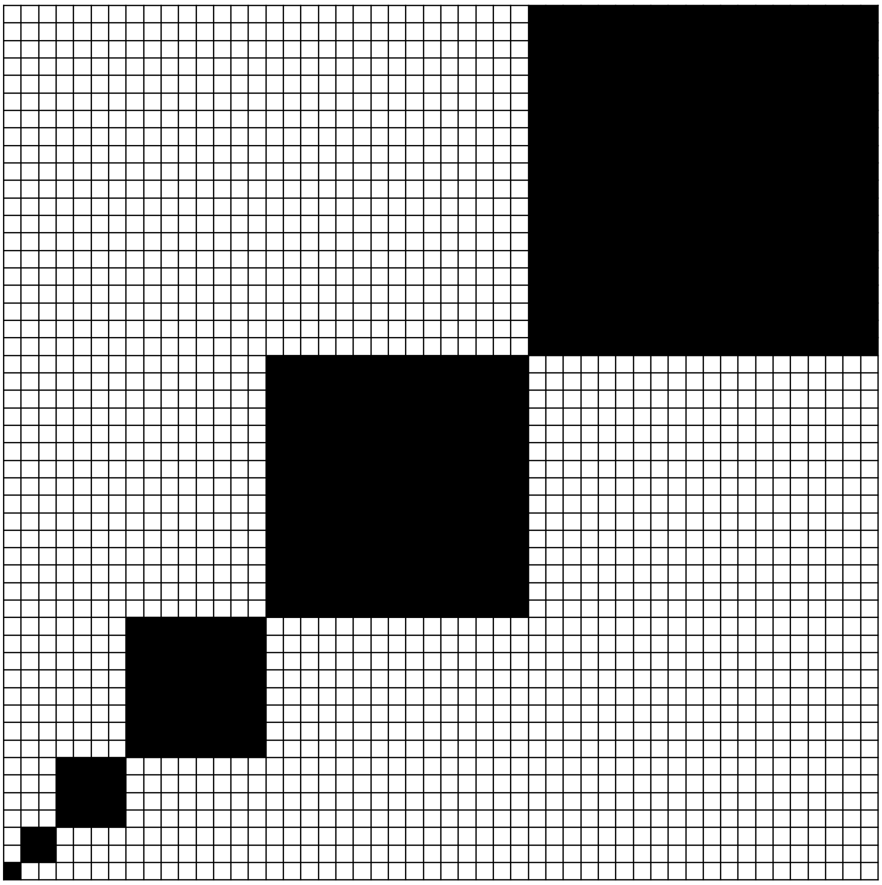
A κ_4 függvény értékeinek táblázata (7. Táblázat) és a jó állások táblázata (8. Táblázat):

```
Table[kappak4[{a, b}],
  {a, 15, 1, -1}, {b, 1, 15, 1}] // MatrixForm
```

```
datak4 =
  Table[kappak4[{a, b}], {a, 50, 1, -1}, {b, 1, 50, 1}];
ArrayPlot[datak4, ColorFunction ->
  (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
 ColorFunctionScaling → False, Mesh → All, MeshStyle → Black]
```

$$\begin{pmatrix}
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

7. Táblázat



8. Táblázat

D. LEGO$_V$

A 36. Megjegyzésben szereplő κ_1 függvény:

```
kappas1[{a_, b_} /; a == b] := kappas1[{a, b}] = 2 a - 2
kappas1[{a_, b_} /; a < b] := kappas1[{a, b}] = 2 a - 1
kappas1[{a_, b_}] := kappas1[{a, b}] = 2 b - 1
```

Definiáljuk a ⊗ műveletet:

```
d[x_, y_] := d[x, y] = x + y - Mod[x, 2] Mod[y, 2]
```

A 3. fejezet (3) képlete által definiált κ_2 függvény:

```
kappas2[{1, 1}] = 0;
kappas2[{a_, b_}] :=
 Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},
  H1 = Table[d[kappas2[{a1, b0}], kappas1[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[d[kappas2[{a0, b1}], kappas1[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  kappas2[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]
 ]
```

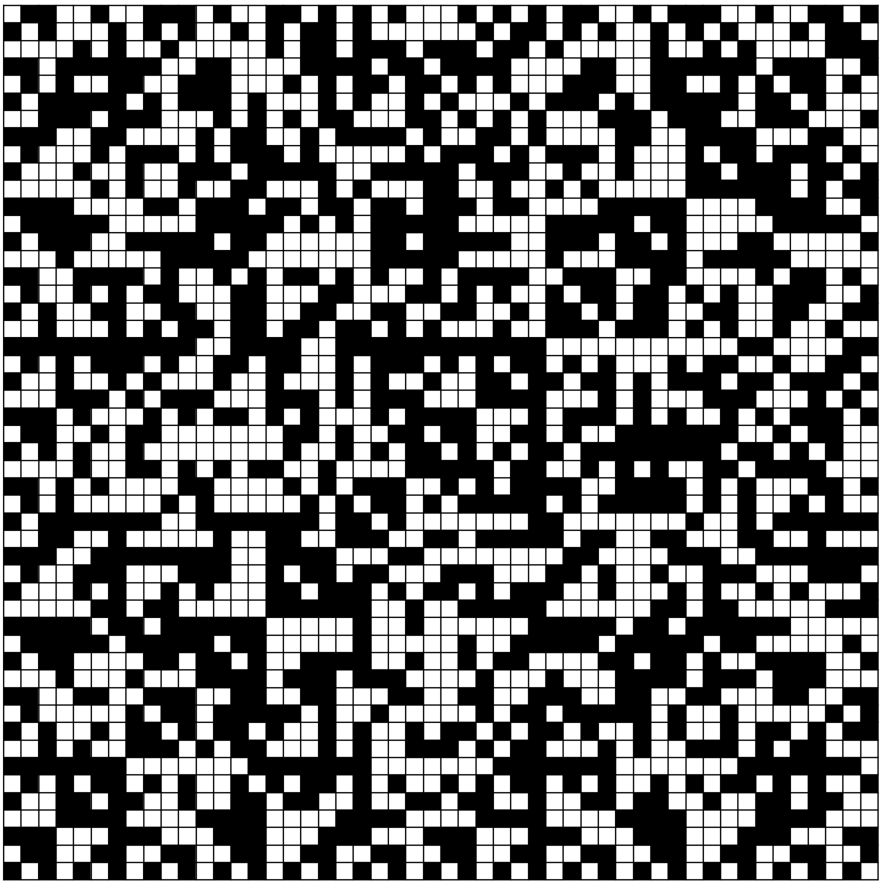
A κ_2 függvény értékeinek táblázata (9. Táblázat) és a jó állások táblázata (10. Táblázat):

```
Table[kappas2[{a, b}],
  {a, 15, 1, -1}, {b, 1, 15, 1}] // MatrixForm
```

```
datas2 =
  Table[kappas2[{a, b}], {a, 50, 1, -1}, {b, 1, 50, 1}];
ArrayPlot[datas2, ColorFunction ->
  (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
 ColorFunctionScaling → False, Mesh → All, MeshStyle → Black]
```

$$
\begin{pmatrix}
14 & 22 & 26 & 28 & 32 & 33 & 36 & 38 & 39 & 42 & 44 & 46 & 48 & 50 & 52 \\
13 & 20 & 24 & 26 & 30 & 32 & 33 & 36 & 38 & 40 & 42 & 44 & 37 & 48 & 50 \\
12 & 19 & 22 & 24 & 27 & 29 & 31 & 33 & 36 & 38 & 37 & 42 & 44 & 37 & 48 \\
11 & 17 & 21 & 22 & 25 & 27 & 29 & 32 & 33 & 33 & 31 & 40 & 42 & 44 & 46 \\
10 & 16 & 19 & 21 & 24 & 26 & 27 & 29 & 32 & 34 & 36 & 31 & 37 & 42 & 44 \\
9 & 14 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 28 & 25 & 32 & 34 & 33 & 38 & 40 & 42 \\
8 & 13 & 16 & 17 & 19 & 22 & 23 & 26 & 28 & 25 & 32 & 33 & 36 & 38 & 39 \\
7 & 11 & 14 & 15 & 18 & 19 & 19 & 24 & 26 & 28 & 29 & 32 & 33 & 36 & 38 \\
6 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 19 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 & 33 & 36 \\
5 & 8 & 11 & 12 & 13 & 16 & 18 & 19 & 22 & 23 & 26 & 27 & 29 & 32 & 33 \\
4 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 & 16 & 18 & 19 & 21 & 24 & 25 & 27 & 30 & 32 \\
3 & 5 & 7 & 8 & 10 & 12 & 14 & 15 & 17 & 19 & 21 & 22 & 24 & 26 & 28 \\
2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 11 & 12 & 14 & 16 & 17 & 19 & 21 & 22 & 24 & 26 \\
1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 & 19 & 20 & 22 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14
\end{pmatrix}
$$

9. Táblázat



10. Táblázat

Irodalom

[1] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, A K Peters, 2001

[2] John. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1979

[3] Csákány Béla: *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon, 2005

[4] Kalmár László: *Zur Theorie der abstrakten Spiele*, Acta Sci. Math. (Szeged) **4**(1928), 65-85.

[5] Megyesi László: *Bevezetés a számelméletbe*, Polygon, 2005

[6] Hugo Steinhaus: *Definitions for a theory of games and pursuit*, Mysl Akademicka **1**(1925), 13-14.
Angol fordítása:
Hugo Steinhaus, Harold W. Kuhn: *Definitions for a theory of games and pursuit*, Naval Research Logistics **7**(1960) 105-108.
DOI: 10.1002/nav.3800070202

[7] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, published electronically at http://oeis.org, 2010

[8] Waldhauser Tamás: *Play with LEGO!*, Colloquium on Combinatorial Games, University of Luxembourg, 2010, http://leopold-loewenheim.uni.lu/dma/

[9] CDF Player, http://www.wolfram.com/cdf-player/

Nyilatkozat

Alulírott Hégely Éva kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2014. május 17.

Hégely Éva
Matematika BSc hallgató